

# 基于最小作用量原理的岩石微振动方程及分析

李思琪<sup>1</sup>, 闫铁<sup>1</sup>, 王希军<sup>2</sup>, 乔勇<sup>2</sup>, 杨敏<sup>3</sup>

(1. 东北石油大学石油工程学院, 黑龙江大庆 163318; 2. 中国石油渤海钻探工程公司, 天津 300457; 3. 中国石油塔里木油田分公司勘探开发研究院, 新疆库尔勒 841000)

**摘要:** 为了研究冲击钻井中钻具冲击频率、岩石固有频率等对破岩效率的影响, 基于最小作用量原理, 建立了岩石在压头冲击作用下的微振动方程, 并以此为基础, 分析了岩石的质量和固有频率、压头的冲击力和冲击频率以及时间等因素与岩石振动位移的关系。分析研究发现, 岩石振动位移在平衡位置处上下变化, 当压头冲击力为 30 kN、岩石密度为 2.39 g/cm<sup>3</sup> 时, 岩石的振动位移最大, 分别为 1.3 和 8 mm; 固有频率为 1 000, 1 500 和 2 000 Hz 的岩石, 分别在 1 000, 1 500 和 2 000 Hz 左右冲击频率下产生 16, 13 和 6 mm 的最大振动位移。研究结果表明: 岩石的振动位移曲线类似余弦曲线, 振动位移与压头的冲击力成正比, 与岩石的密度(质量)成反比; 当压头的冲击频率与岩石的固有频率共振时, 振动位移最大。

**关键词:** 微振动 固有频率 振动位移 冲击钻井 冲击频率 最小作用量

**中图分类号:** TE21 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-0890(2014)03-0066-05

## The Micro-Vibration Equation of Rock and Its Analysis Basing on the Principle of Least Action

Li Siqi<sup>1</sup>, Yan Tie<sup>1</sup>, Wang Xijun<sup>2</sup>, Qiao Yong<sup>2</sup>, Yang Min<sup>3</sup>

(1. School of Petroleum Engineering, Northeast Petroleum University, Daqing, Heilongjiang, 163318, China; 2. Bohai Drilling and Exploration Engineering Company Ltd., CNPC, Tianjin, 300457, China; 3. Exploration and Development Research Institute, Tarim Oilfield Company, PetroChina, Korla, Xinjiang, 841000, China)

**Abstract:** In order to study the effect of impact frequency of percussion drilling tools, natural frequency of rock and other factors on rock breaking effect in percussion drilling, the research on vibration mechanism of rock under harmonic excitation was carried out. In this paper, the micro-vibration equation of rock under the impact of indenter is established based on the principle of least action. Then the effect of mass and natural frequency of rock, impact force, impact time and impact frequency of indenter on vibration displacement were analyzed. The vibration displacement of rock fluctuates up and down at the equilibrium position. When the impact force of indenter is 30 kN or the density of rock is 2.39 g/cm<sup>3</sup>, the vibration displacement of rock will be the largest, 1.3 mm and 2.8 mm respectively. Rocks with natural frequency of 1 000 Hz, 1 500 Hz and 2 000 Hz generate maximum vibration displacement of 16 mm, 13 mm and 6 mm at impact frequency of 1 000 Hz, 1 500 Hz and 2 000 Hz respectively. The results show that the curve of vibration displacement of rock is a kind of cosine curve. The vibration displacement of rock is proportional to the impact force of indenter and is inversely proportional to the density(quality) of rock. When the impact frequency of indenter is equal to the natural frequency of rock, the maximum vibration displacement would be reached.

**Key words:** micro-vibration; natural frequency; vibration displacement; percussion drilling; impact frequency; least action

在石油钻井中, 冲击破岩一直是岩石破碎的主要形式, 无论是技术较为成熟的旋冲钻井<sup>[1]</sup>, 还是目前尚处于研究阶段的高频谐波振动冲击钻井<sup>[2-3]</sup>, 亦或是新兴的高频扭转冲击器钻井<sup>[4-5]</sup>, 都与钻具冲击引起的岩石振动息息相关。在冲击钻井方面, 前人对冲击引起的钻柱振动方向进行了较多研究<sup>[6-8]</sup>, 包

收稿日期: 2013-09-18; 改回日期: 2014-03-31。

作者简介: 李思琪(1989—), 女, 黑龙江大庆人, 2011年毕业于东北石油大学石油工程专业, 在读博士研究生, 主要从事岩石力学及高效破岩方面的研究。

联系方式: (0459)6503643, lisiqi448@163.com。

基金项目: 国家自然科学基金项目“钻头谐振激励下岩石的响应机制及破碎机理研究”(编号: 51274072)、黑龙江省青年科学基金项目“旋转振动钻具的共振碎岩钻孔机理研究”(编号: QC2012C022)、高等学校博士学科点专项科研基金项目“谐波振动激励下单齿侵岩机理及试验分析”(编号: 20122322120002)资助。

括钻柱的扭转振动、纵向振动以及横向振动等;也有学者对冲击作用下岩石的力学性能进行了相关研究<sup>[9-11]</sup>;还有学者对钻具冲击振动岩石的过程进行了模拟研究<sup>[12-13]</sup>。但在现有的研究成果中,并没有对钻具冲击岩石过程建立相关的岩石振动分析模型。然而,在冲击破岩过程中,钻具的冲击频率、岩石的振动位移等因素都会对振动冲击效率和岩石破碎效果起关键作用。为此,笔者结合冲击振动的特点,利用力学中的最小作用量原理,建立了相应的岩石微振动模型,以期能为振动冲击作用下岩石的运动过程提供理论依据。

## 1 最小作用量原理

对于力学体系的运动规律,最一般的形式可以由最小作用量原理给出。根据该原理,每一力学体系可由拉格朗日函数  $L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t)$  来描述其特征,该函数可缩写为  $L(q, \dot{q}, t)$ 。

假定在  $t=t_1$  和  $t=t_2$  时刻,体系占有 2 个确定的位置,则在这 2 个位置之间有作用量最小的运动方式,可表示为:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1)$$

式(1)为运动系统的作用量,因而,最小作用量原理可以写成:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (2)$$

## 2 岩石微振动模型的建立

基于最小作用量原理,建立了多自由度系统振动方程的一般形式,在此基础上根据岩石实际振动的特点,建立了岩石的微振动模型。

### 2.1 多自由度的振动运动方程

根据拉格朗日最小作用量原理,系统的运动方程即为使式(1)在运动时间段内积分取极小值所确定的方程。对式(1)进行变分得:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (3)$$

由于模型由多个弹簧连接而成,弹簧不能自由振动,之间存在干扰,所以振动存在耦合。对于多自由度振动,形变所产生的势能的一般形式为:

$$U = \frac{1}{2} \sum k_{ik} x_i x_k \quad (4)$$

动能的一般形式为:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k \quad (5)$$

把平衡位置的坐标定义为 0,则势能的极小值为 0,根据动力学的对称性概念可得:

$$k_{ik} = k_{ki} \quad (6)$$

$$m_{ik} = m_{ki} \quad (7)$$

所以,拉格朗日方程可以写为:

$$L(q, \dot{q}, t) = T - U \quad (8)$$

将式(4)和式(5)代入式(8),并由拉格朗日方程的可加性得:

$$L = \frac{1}{2} \sum m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - \frac{1}{2} \sum k_{ik} x_i x_k \quad (9)$$

由式(9)可得拉格朗日方程的全微分方程:

$$dL = \frac{1}{2} \sum (m_{ik} \dot{x}_i d\dot{x}_k + m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_i dx_k - k_{ik} x_k dx_i) \quad (10)$$

由于式(10)中求和部分是对称的二次型矩阵,将  $i$  和  $j$  对调,并考虑  $m$  和  $k$  的对称性得:

$$dL = \sum (m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_k dx_i) \quad (11)$$

根据开始的变分理论可得:

$$\sum m_{ik} \ddot{x}_k + \sum k_{ik} x_k = 0 \quad (12)$$

由傅里叶级数理论,可以得到:

$$x_k = A_k e^{i\omega t} \quad (13)$$

将式(13)代入式(12)得到行列式  $|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0$ 。可见,  $\omega$  为相应矩阵的本征值,即振动频率。

### 2.2 岩石的微振动方程

假设岩石是各向同性的均匀介质,忽略地层压力与温度对岩石的影响,将钻头与岩石的作用简化为平底压头与岩石的作用。用多个弹簧叠加模拟平底压头建立岩石振动模型,压头对岩石施加的能量为  $U'(x, t)$ ,岩石的振动位移为  $x$ ,如图 1 所示。

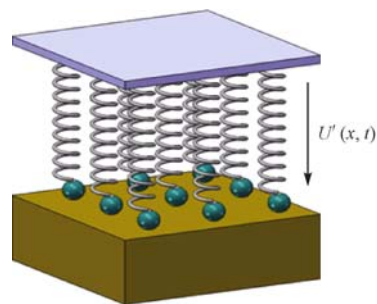


图 1 岩石振动模型

Fig. 1 The model of rock vibration

将压头下面的区域无限分割,单独提取一个小

微元进行分析,压头对质量为  $m$ 、固有频率为  $\omega$  的岩石施加频率为  $\omega_1$  的冲击力  $F$ (如图 2 所示)。由于平底压头与岩石作用面上压头各点对岩石的作用力相同,因此可用平底压头上一一点与岩石平面上微元的作用关系代替整个平底压头与岩石的作用,考虑压头与岩石的实际作用特点,忽略耦合力,对多自由度振动的运动方程进行简化。

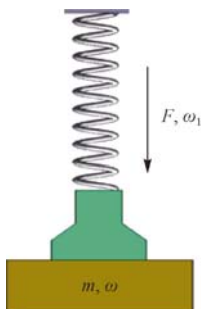


图 2 平底压头与岩石作用微元分析

Fig. 2 The infinitesimal analysis unit of flat indenter and rock

对于钻头的外加能量  $U'(x, t)$ , 将其在  $x=0$  处的幂级数展开并舍去  $x$  的 2 阶无穷小量, 得:

$$U'(x, t) = U'(0, t) + x \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (14)$$

式(14)等号右端第一项只是时间的全导数项, 变分时消失, 由势能的定义得拉格朗日方程为:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t) \quad (15)$$

变分得出相应的微分方程为:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \quad (16)$$

因为压头施加的力具有周期性, 因此可以写成以下形式:

$$F = b\cos(\omega_1 t + \beta) \quad (17)$$

将式(17)代入式(16), 可得其通解为:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{b}{m(\omega^2 - \omega_1^2)}\cos(\omega_1 t + \beta) \quad (18)$$

由于压头岩石作用面上的区域振动状态是相同的, 所以所取微元就可以代表整个区域, 因此式(18)即为平底压头下岩石的微振动方程。

当  $\omega_1 = \omega$  时, 系统处于共振状态, 此时振动不再微弱, 式(18)不再适用于岩石振动位移的求解。共振时, 式(18)可改写为:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{b}{m(\omega^2 - \omega_1^2)}[\cos(\omega_1 t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)] \quad (19)$$

当  $\omega_1 \rightarrow \omega$  时, 对式(19)应用洛必达法则, 可得:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{b}{2m\omega}t\sin(\omega t + \beta) \quad (20)$$

式(20)即为共振状态下岩石的振动位移方程。

### 3 岩石微振动模型的影响因素分析

结合岩石微振动模型, 应用东北石油大学自主研发的岩石振动激励模拟测试系统, 分析了岩石的固有频率、密度、压头冲击力等因素对岩石振动的影响规律。

在岩石固有频率和压头冲击频率一定的条件下, 仅改变压头的冲击力, 得到岩石在不同时刻下的振动位移变化曲线(见图 3)。

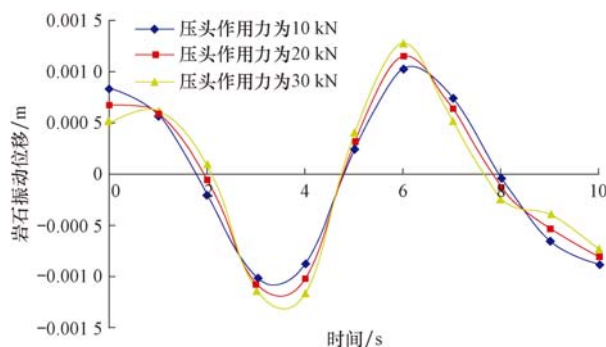


图 3 不同压头作用力下岩石在不同时刻产生的振动位移

Fig. 3 The relationship between vibration displacement and time under different impact

由图 3 可知, 岩石振动位移路径是由 2 个余弦函数组成的上下往复曲线, 压头的冲击力越大, 岩石产生的最大位移越大。

图 4 为同一时刻不同密度的岩石在不同冲击频率下的振动位移, 图 5 为相同条件下不同密度的岩石在受迫振动时产生的振动位移曲线。由图 4、图 5 可知, 岩石密度越小, 越容易产生振动, 相应的振动位移也越大, 越容易被破碎, 这与室内试验数据规律相符(见表 1)。

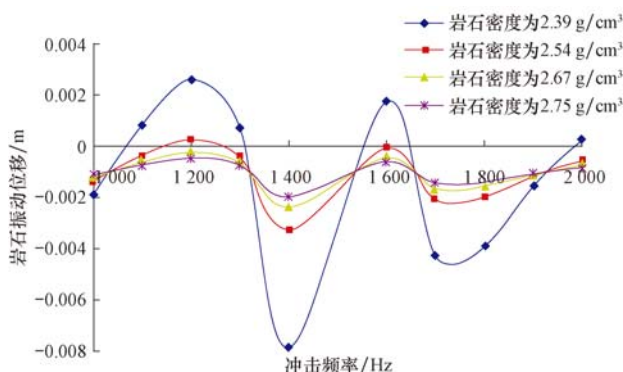


图 4 不同密度岩石在不同冲击频率下的振动位移

Fig. 4 The relationship between vibration displacement and impact frequency with different density of rock

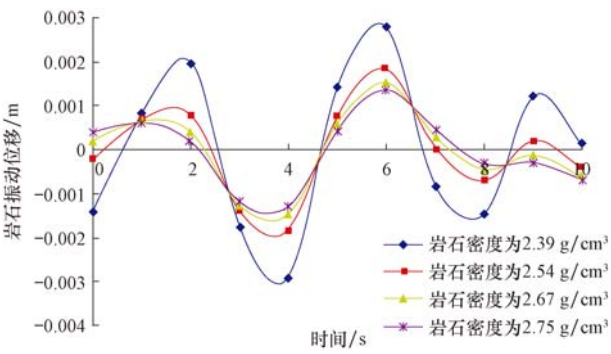


图 5 不同密度岩石在不同时刻产生的振动位移

Fig. 5 The relationship between vibration displacement and time with different density of rock

表 1 致密砂岩岩心试样的测试数据

Table 1 The test data of core samples of tight sandstone

序号	井深/ m	岩心岩性	密度/ ( $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ )	弹性模量/ MPa	可钻性 级值	共振频率/ kHz
1	630	灰色粉砂岩	2.39	14 086.5	5.2	1.58
2	1 033	灰色砂砾岩	2.54	16 326.5	5.8	1.66
3	1 966	泥质粉砂岩	2.67	28 379.1	6.5	2.17
4	2 526	粉砂岩	2.75	37 510.6	7.3	2.46

由于岩石在实际振动中上下振动的幅度很微弱,因此曲线中岩石振动产生的最大位移的变化幅度也很小。

图 6 为用 1 000 Hz 的压头频率冲击岩石得到的不同时刻下不同固有频率岩石的振动位移。由图 6 可知,固有频率为 1 300 Hz 的岩石能够产生最大的振动位移。图 7 为对固有频率 2 000 Hz 的岩石施加不同的冲击频率时,不同时刻下岩石振动产生的振动位移。由图 7 可知,冲击频率为 1 500 和 2 500 Hz 时,岩石能够产生最大的振动位移。

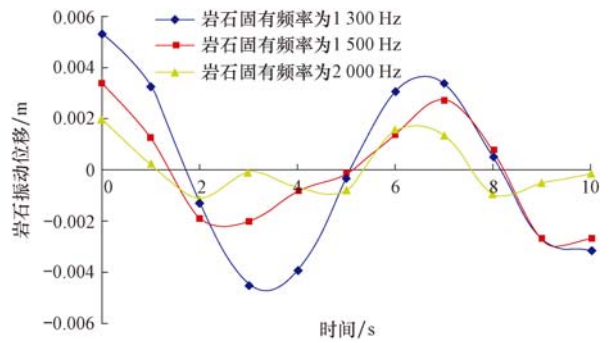


图 6 不同固有频率的岩石在不同时刻产生的振动位移

Fig. 6 The relationship between vibration displacement and time with different natural frequency of rock

图 8 为  $t=2$  s 时不同固有频率的岩石在不同冲击频率下产生的振动位移。由图 8 可知,固有频率为 1 000,1 500 和 2 000 Hz 的岩石,分别在 1 000,

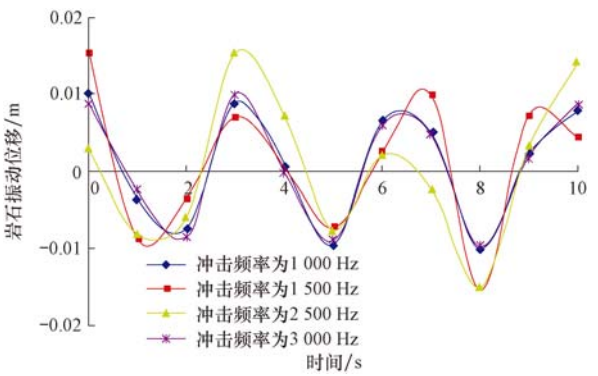


图 7 不同冲击频率下岩石在不同时刻产生的振动位移

Fig. 7 The relationship between vibration displacement and time with different impact frequency

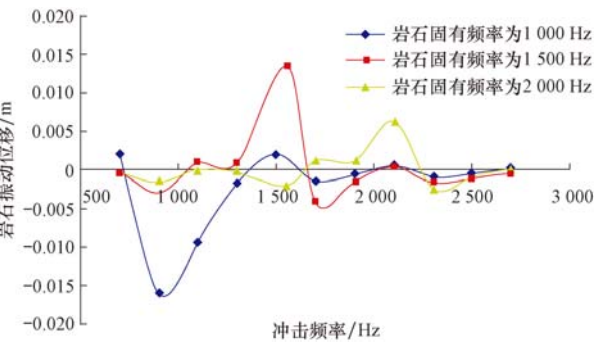


图 8 不同固有频率的岩石在不同冲击频率下岩石的振动位移

Fig. 8 The relationship between vibration displacement and impact frequency with different natural frequency of rock

1 500 和 2 000 Hz 左右冲击频率下产生最大位移,且岩石的振动位移明显大于其他冲击频率产生的振动位移。由此可知:当岩石固有频率与压头冲击频率越接近时,岩石的振动位移越大;岩石的固有频率越偏离压头的冲击频率时,岩石的振动位移越小,且曲线出现不稳定波动,说明岩石的振动处于失稳状态。因此,用压头破碎岩石时,应尽量选择与所钻岩石固有频率相接近的冲击频率,此时岩石易达到共振状态,振动幅度最大,易发生破碎。

综上所述,岩石密度和压头冲击力对岩石振动位移影响较小,因此其引起的最大振动位移变化幅度也较小,而岩石固有频率和压头冲击频率对岩石的振动特性影响明显,在冲击频率与岩石固有频率相接近时引起的岩石最大振动位移明显大于冲击频率与岩石固有频率相差较大的情况。同时,由于岩石振动位移曲线为类余弦曲线,所以岩石振动位移大小随各影响因素的变化呈周期性变化,这与岩石在平衡位置上下振动的特点相符。



## 4 结 论

1) 基于最小作用量原理,建立了岩石的微振动模型,给出了岩石的微振动位移方程。分析可知,岩石的微振动位移曲线呈类余弦函数形状,振动位移随各因素的变化在平衡位置处上下波动,与实际情况下岩石在平衡位置上下振动的情况相符。

2) 由试验数据和岩石微振动模型可知:压头冲击频率一定的情况下,岩石的密度越小,越容易产生振动;冲击力越大,岩石产生的振动位移越大。

3) 岩石固有频率对自身振动的影响明显高于岩石密度、压头冲击力等因素对振动的影响。当压头冲击频率与岩石固有频率相同时发生共振,振动位移最大,且明显大于其他任何情况。

### 符号说明

$q$  为拉格朗日函数中的广义坐标; $\dot{q}$  为广义速度,  $\text{m/s}$ ;  $S$  为作用量,  $\text{m}$ ;  $t$  为时间,  $\text{s}$ ;  $U$  为振动系统势能,  $\text{J}$ ;  $T$  为振动系统动能,  $\text{J}$ ;  $k$  为岩石刚度,  $\text{N/m}$ ;  $k_{ik}$  和  $k_{ki}$  为岩石刚度矩阵中对称的两项;  $x$  为岩石振动位移,  $\text{m}$ ;  $x_i$  和  $x_k$  为岩石振动位移矩阵中的第  $i$  项和第  $k$  项;  $\dot{x}$  为岩石振动速度,  $\text{m/s}$ ;  $\dot{x}_i$  和  $\dot{x}_k$  为岩石振动速度矩阵中的第  $i$  项和第  $k$  项;  $\ddot{x}$  为岩石振动加速度,  $\text{m/s}^2$ ;  $\ddot{x}_k$  为岩石振动加速度矩阵中的第  $k$  项;  $m$  为岩石质量,  $\text{kg}$ ;  $m_{ik}$  和  $m_{ki}$  为岩石质量矩阵中对称的两项;  $\omega$  为岩石固有频率,  $\text{rad/s}$ ;  $\omega_1$  为压头冲击频率,  $\text{rad/s}$ ;  $F$  为压头冲击力,  $\text{N}$ ;  $\alpha, \beta$  为初始相位,  $\text{rad}$ ;  $a, b$  为振幅,  $\text{m}$ ;  $f$  为岩石固有频率,  $f = 2\pi\omega$ ,  $\text{Hz}$ ;  $f_1$  为压头冲击频率,  $f_1 = 2\pi\omega_1$ ,  $\text{Hz}$ 。

### 参 考 文 献

#### References

- [1] 蒋宏伟,刘永胜,翟应虎,等.旋冲钻井破岩力学模型的研究[J].石油钻探技术,2006,31(1):10-16.  
Jiang Hongwei, Liu Yongsheng, Zhai Yinghu, et al. Research on rock-crushing mechanics model in rotary and percussive drilling[J]. Petroleum Drilling Techniques, 2006, 31(1): 10-16.
- [2] Li Wei, Yan Tie, Li Siqi, et al. Rock fragmentation mechanisms and an experimental study of drilling tools during high-frequency harmonic vibration[J]. Petroleum Science, 2013, 10(2): 205-211.
- [3] 许京国,尤军,陶瑞东,等.自激振荡式冲击钻井工具在大港油田的应用[J].石油钻探技术,2013,41(4):116-119.  
Xu Jingguo, You Jun, Tao Ruidong, et al. Application of self-oscillating impact drilling tool in Dagang Oilfield[J]. Petroleum Drilling Techniques, 2013, 41(4): 116-119.
- [4] 周祥林,张金成,张东清. TorkBuster 扭力冲击器在元坝地区的试验应用[J]. 钻采工艺, 2012, 35(2): 15-17.

- Zhou Xianglin, Zhang Jincheng, Zhang Dongqing. Experimental application of TorkBuster torsional impactor in Yuanba Region [J]. Drilling & Production Technology, 2012, 35(2): 15-17.
- [5] 吕晓平,李国兴,王震宇,等.扭力冲击器在鸭深1井志留系地层的试验应用[J].石油钻采工艺,2012,34(2):99-101.  
Lv Xiaoping, Li Guoxing, Wang Zhenyu, et al. Experiment of torkbuster on Well YS1 in Silurian Formation[J]. Oil Drilling & Production Technology, 2012, 34(2): 99-101.
- [6] 闫铁,韩春杰,毕雪亮.斜井眼内钻柱轴向振动的有限元分析[J].石油钻探技术,2006,34(4):5-8.  
Yan Tie, Han Chunjie, Bi Xueliang. The finite element analysis on axial vibration of drill string in deviated wells[J]. Petroleum Drilling Techniques, 2006, 34(4): 5-8.
- [7] 李子丰,张永贵,侯绪田,等.钻柱纵向和扭转振动分析[J].工程力学,2004,21(6):203-210.  
Li Zifeng, Zhang Yonggui, Hou Xutian, et al. Analysis of longitudinal and torsion vibration of drillstring[J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(6): 203-210.
- [8] 刘清友,马德坤,钟青.钻柱扭转振动模型的建立及求解[J].石油学报,2000,21(2):78-82.  
Liu Qingyou, Ma Dekun, Zhong Qing. A drilling string torsional vibration model and its solution[J]. Acta Petrolei Sinica, 2000, 21(2): 78-82.
- [9] 李夕兵,左宇军,马春德.动静组合加载下岩石破坏的应变能密度准则及突变理论分析[J].岩石力学与工程学报,2005,24(16):2814-2824.  
Li Xibing, Zuo Yujun, Ma Chunde. Failure criterion of strain energy density and catastrophe theory analysis of rock subjected to static-dynamic coupling loading[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(16): 2814-2824.
- [10] 周小平,哈秋聆,张永兴,等.峰前围压卸荷条件下岩石的应力-应变全过程分析和变形局部化研究[J].岩石力学与工程学报,2005,24(18):3236-3245.  
Zhou Xiaoping, Ha Qiuling, Zhang Yongxing, et al. Analysis of localization of deformation and complete stress-strain relation for mesoscopic heterogeneous brittle rock materials when axial stress is held constant while lateral confinement is reduced[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(18): 3236-3245.
- [11] 刘建锋,徐进,李青松,等.循环荷载下岩石阻尼参数测试的试验研究[J].岩石力学与工程学报,2010,29(5):1036-1041.  
Liu Jianfeng, Xu Jin, Li Qingsong, et al. Experimental research on damping parameters of rock under cyclic loading [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(5): 1036-1041.
- [12] 伊鹏,刘衍聪,高凯,等.基于有限元法的单根钻杆动力学仿真模拟分析[J].石油钻采工艺,2009,31(4):12-15,20.  
Yi Peng, Liu Yancong, Gao Kai, et al. Study on dynamic simulation research of single drill pipe based on finite element method[J]. Oil Drilling & Production Technology, 2009, 31(4): 12-15, 20.
- [13] 况雨春,马德坤,刘清友,等.钻柱-钻头-岩石系统动态行为仿真[J].石油学报,2001,22(3):81-85.  
Kuang Yuchun, Ma Dekun, Liu Qingyou, et al. Computer simulation on dynamic action of drillstring-bit-rock system[J]. Acta Petrolei Sinica, 2001, 22(3): 81-85.

[编辑 令文学]