

◀ 钻井完井 ▶

doi:10.3969/j.issn.1001-0890.2014.01.005

圆弧型井眼轨道设计问题的拟解析解理论

鲁 港

(中国石油辽河油田分公司勘探开发研究院,辽宁盘锦 124010)

摘要:为了快速、可靠地求解井眼轨道设计问题所形成的多元非线性方程组,基于数学机械化理论的思想和技术,经过复杂的数学公式推导,求出了该方程组的拟解析解,创建了拟解析解的完整理论体系。理论证明,从井眼轨道设计方程组出发可以推导出只含有一个未知数的特征多项式,而该方程组的所有未知数可以由该特征多项式的全部实数根和一组解析计算公式依序逐个计算出来。理论分析和实际计算表明,利用拟解析解方法可以快速判断该方程组是否有解,在有唯一解和多个解的情况下,能够快速、准确地计算出该唯一解或全部解。拟解析解方法克服了初值依赖性、收敛性、不能求多个解等数值迭代类算法的固有缺陷,它的计算精度只与特征多项式求实数根算法有关,是一种相对精确的算法。研究结果表明,拟解析解方法是求解井眼轨道设计方程组的快速、可靠、精确的先进计算技术,不仅是算法研究上的理论创新,而且在钻井软件开发上具有重要的实用价值。

关键词:钻井设计 井眼轨道 方程组 拟解析解 多项式 实数根

中图分类号:TE21 **文献标识码:**A **文章编号:**1001-0890(2014)01-0026-07

Quasi-Analytic Solution Theory for Arc Type Well Trajectory Design

Lu Gang

(Exploration & Development Research Institute of Liaohe Oilfield Company of PetroChina, Pan-jin, Liaoning, 124010, China)

Abstract: To solve the system of multivariate nonlinear equations in well trajectory design quickly and reliably, the analytical solving method for the system of equations has been studied. Based on the theory and techniques of the mathematics and mechanics, a complete theoretical system of quasi-analytical solutions was created through complex mathematical formula derivation. It was proved theoretically that a characteristic polynomial containing only one unknown can be derived from the design equations, and all unknowns in designed equations can be calculated in sequence by all real roots of the characteristic polynomial and a group of analytical formula. The theoretical analysis and practical calculation showed that the quasi-analytical method can determine whether the system of equations are solvable, and calculate the solutions in the cases of the system of equations that have a unique solution or more. The quasi-analytical solution method completely overcomes inherent defects of numerical iteration methods such as initial dependence, convergence, and inability to solve multiple solutions etc. Its accuracy only depends on all real roots of characteristic polynomial, being an exact algorithm. The results showed that proposed method is a fast, reliable and accurate computing technique to solve the system of design equations. It is not only a theoretical innovation in algorithm research, but also has an important practical value in drilling software development.

Key words: drilling design; wellbore trajectory; system of equations; quasi-analytic solutions; polynomial; real root

井眼轨道设计是钻井设计过程中最基础的工作之一^[1]。由于三维轨道设计复杂,涉及大量数值计算和非线性多元方程组求解,因此需要开发专用的计算机软件来实现。30 多年以来,虽然三维定向井、水平井的钻井工艺和技术日趋完善,但在该方程组求解方法方面却没有太大进展^[2-6],主要原因是从轨道设计问题得到的方程组是一个多元非线性方程

组,不能直接求出其解析解,只能使用数值迭代法求解。而数值迭代法的一个固有缺陷是,迭代过程是

收稿日期:2013-03-21;改回日期:2013-12-17。

作者简介:鲁港(1963—),男,辽宁锦州人,1985 年毕业于复旦大学应用数学专业,2005 年获大连理工大学软件工程专业硕士学位,高级工程师,长期从事石油钻探数学模型方面的研究工作。

联系方式:13842759870,214811882@qq.com。

否收敛严重依赖于迭代初值的选取^[7],如果初值选择不合适,可能导致迭代过程不收敛。当迭代过程不收敛时,无法判断是迭代格式或迭代参数不合适导致的还是由于设计问题本身就是无解的。为了求出轨道设计问题的解析解,笔者进行了近十年的探索研究^[8-13],终于找到了该方程组的拟解析解,同时开发了钻井轨道设计软件,用大量的实际数据对拟解析解理论结果进行了验证。结果表明,拟解析解理论不仅是一种快速求解井眼轨道设计方程组的有效算法,而且对于设计问题的无解、多解等情况能够给出准确的判断,这一特点对于设计人员提高设计效率、改进设计质量有很大的帮助。

1 方程(组)和解的几个关键概念

井眼轨道设计问题最终都是归结为求解一个多元非线性方程组。为了准确理解“解”的含义,下面给出一般的方程(组)各种“解”的数学解释。

1.1 多项式的解析解

以一元二次多项式函数为例:

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (1)$$

式中:A, B, C 为实常数; x 为实自变量。

令:

$$\Delta = B^2 - 4AC \quad (2)$$

则当 $\Delta \geq 0$ 时,用下式求其解析解:

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} \quad (3)$$

而对于一般的非线性方程(组),除特殊情况外,通常难以找到其解析解,甚至无法证明是否存在解析解。

1.2 实际问题的真解和伪解

对于生产实际中遇到的大多数方程的求解问题,未知数具有明确的物理意义,取值有一定的约束范围。例如,自变量 x 是一只铅笔的长度时,要求 $10 \text{ cm} \leq x \leq 30 \text{ cm}$,假设从实际问题得出的方程为:
 $g(x) = (x+1)(x-3)(x-15)(x-99) = 0 \quad (4)$

则方程(4)有 4 个实数解,但是满足铅笔长度约束条件的解只有 $x_3 = 15$,该解为实际问题的真解,其他 3 个解为实际问题的伪解。

1.3 数值解和数值迭代法

当方程(组)没有解析解或者解析解的计算非常

复杂时,一般使用数值迭代法求解,所得到的解为数值解或近似解。例如 Newton 迭代法^[7]:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

迭代得到的近似解与迭代初值 x_1 密切相关。例如:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x+1)(x+3) \quad (6)$$

有 2 个精确解: $x=1$ 和 $x=3$ 。如果迭代初值 $x_1 < 2$,则迭代过程收敛到解 $x=1$;如果 $x_1 > 2$,则收敛到解 $x=3$ 。

对于实际问题产生的方程(组),由于在求解之前不知道真解的具体数值,在设定迭代初值时就有一定的盲目性。当迭代初值很接近真解时,迭代过程很快就收敛到真解;当迭代初值与真解相差较大时,迭代过程可能收敛很慢,或者迭代过程不收敛,或者虽然收敛但是收敛到伪解。

数值迭代法还有一个很大的缺陷:无法对实际问题是否有解以及有几个解做出正确判断。迭代过程是一个单向过程,从某一个迭代初值出发即使收敛也只能得到某一个近似解。当迭代过程不收敛时,不能判断迭代失败的原因是方程(组)本身无解还是迭代初值设定得离解太远,在这种情况下,就需要再次设定迭代初值对此重复迭代过程。另外,在方程(组)有多个解的情况下,只能多次设定不同的迭代初值进行迭代计算,即使花费很多计算时间也无法保证能够求出全部解。

1.4 井眼轨道设计方程组的拟解析解

井眼轨道设计问题最终可归结为一个多元非线性方程组的求解问题。经过多年努力,受数学机械化思想^[14-16]的启发,最终找到了井眼轨道设计方程组的拟解析解,即存在一个多项式函数 $F(x)$ 和 n 个实函数 $f_1(x), f_2(x, x_1), f_3(x, x_1, x_2), \dots, f_n(x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$,使轨道设计方程组的 n 个未知数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 能够按照下面的解析公式依序逐个计算出来:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(a) \\ x_2 = f_2(a, x_1) \\ x_3 = f_3(a, x_1, x_2) \\ \vdots \\ x_n = f_n(a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{cases} \quad (7)$$

式中: a 为多项式 $F(x)$ 的实数根。

多项式 $F(x)$ 称为井眼轨道设计方程组的特征多项式或特征函数。

笔者对拟解析解的存在性给出了严格的数据证明,并且得到了函数 F, f_1, \dots, f_n 的解析计算公式。

在使用式(7)计算之前,需要先求出特征多项式的全部实数根,并将其带入式(7)参与计算。拟解析解与解析解的计算特征非常相似,只是额外增加了求特征多项式全部实数根的计算量。

2 数学模型和方程组

约定:除非特别指明,下文所有计算公式中,具有长度量纲的参数其单位为 m,角度的单位为 rad,井眼曲率的单位为 rad/m。

设计轨道是由 $2k+1$ 个设计井段分段连接而成的三维空间曲线,其中 k 个为圆弧井段,另外 $k+1$ 个为稳斜方位井段(简称稳斜井段),圆弧井段与稳斜井段相间连接(连接点处连续二阶可微),这样的轨道简称为圆弧型设计轨道。

再约定:1)井段及其末端点的物理参数的下标依次记为 $1, 2, 3, \dots$,设计轨道初始点物理参数的下标记为 0 ;2)稳斜井段参数的下标记为 $2i+1$,其中 $i=0, 1, 2, \dots, k$;3)圆弧井段参数的下标记为 $2i$,其中 $i=1, 2, \dots, k$ 。不再一一指出。

2.1 井眼轨道设计问题的数学模型

对于圆弧井段,其坐标增量公式为^[1]:

$$\begin{cases} \delta_x = \lambda(\sin \alpha_a \cos \varphi_a + \sin \alpha_b \cos \varphi_b) \\ \delta_y = \lambda(\sin \alpha_a \sin \varphi_a + \sin \alpha_b \sin \varphi_b) \\ \delta_z = \lambda(\cos \alpha_a + \cos \alpha_b) \end{cases} \quad (8)$$

式中: $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 分别为圆弧井段的北坐标增量、东坐标增量和垂深增量; $\alpha_a, \varphi_a, \alpha_b$ 和 φ_b 分别为圆弧始端和末端的井斜角和方位角; λ 为辅助参数。

λ 的计算式为:

$$\lambda = \frac{\delta L}{\epsilon} \tan \frac{\epsilon}{2} \quad (9)$$

式中: ϵ 和 δL 分别为圆弧井段的狗腿角和弧长。

令:

$$\begin{cases} l_a = \sin \alpha_a \cos \varphi_a \\ m_a = \sin \alpha_a \sin \varphi_a \\ n_a = \cos \alpha_a \\ l_b = \sin \alpha_b \cos \varphi_b \\ m_b = \sin \alpha_b \sin \varphi_b \\ n_b = \cos \alpha_b \end{cases} \quad (10)$$

则式(8)、式(9)可以改写成如下形式:

$$\begin{cases} \delta_x = \lambda(l_a + l_b) \\ \delta_y = \lambda(m_a + m_b) \\ \delta_z = \lambda(n_a + n_b) \\ \lambda K = \tan \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \quad (11)$$

式中: $K = \frac{\epsilon}{\delta L}$ 为圆弧的曲率。

(l_a, m_a, n_a) 和 (l_b, m_b, n_b) 分别为设计井眼轨道在井段始点和终点处切线方向的矢量。

圆弧型井眼轨道设计问题的数学模型如下:

$$\Delta X = \sum_{i=0}^k l_{2i+1} \Delta L_{2i+1} + \sum_{i=1}^k (l_{2i-1} + l_{2i+1}) \lambda_{2i} \quad (12)$$

$$\Delta Y = \sum_{i=0}^k m_{2i+1} \Delta L_{2i+1} + \sum_{i=1}^k (m_{2i-1} + m_{2i+1}) \lambda_{2i} \quad (13)$$

$$\Delta Z = \sum_{i=0}^k n_{2i+1} \Delta L_{2i+1} + \sum_{i=1}^k (n_{2i-1} + n_{2i+1}) \lambda_{2i} \quad (14)$$

$$\cos \epsilon_{2i} = l_{2i-1} l_{2i+1} + m_{2i-1} m_{2i+1} + n_{2i-1} n_{2i+1} \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (15)$$

$$\lambda_{2i} K_{2i} = \tan \frac{\epsilon_{2i}}{2} \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (16)$$

式中: $\Delta X, \Delta Y$ 和 ΔZ 为目标点位移; ΔL_{2i+1} 和 $(l_{2i+1}, m_{2i+1}, n_{2i+1})$ 等分别为稳斜井段的长度和方向矢量; K_{2i}, ϵ_{2i} 和 λ_{2i} 等分别为圆弧井段的井眼曲率、狗腿角和辅助参数。

2.2 无量纲化与方程组

令:

$$D = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2} \quad (17)$$

式中: D 为设计的井眼轨道的初始点与目标点之间的直线距离。

再令:

$$x_{2i+1} = \frac{\Delta L_{2i+1}}{D}, \quad x_{2i} = \frac{\lambda_{2i}}{D}, \quad k_{2i} = \lambda_{2i} D \quad (18)$$

$$p = \frac{\Delta X}{D}, \quad q = \frac{\Delta Y}{D}, \quad r = \frac{\Delta Z}{D} \quad (19)$$

$$t_a = (p, q, r), \quad t_{2i+1} = (l_{2i+1}, m_{2i+1}, n_{2i+1}) \quad (20)$$

则式(12)—(16)可以改写成如下形式:

$$\begin{cases} t_a = \sum_{i=0}^k (x_{2i} + x_{2i+1} + x_{2i+2}) t_{2i+1} \\ t_{2i-1} \cdot t_{2i+1} = \cos \epsilon_{2i} \quad (i=1, 2, \dots, k) \\ k_{2i} x_{2i} = \tan \frac{\epsilon_{2i}}{2} \quad (i=1, 2, \dots, k) \end{cases} \quad (21)$$

式中: $t_{2i-1} \cdot t_{2i+1}$ 等表示矢量数积运算。

式(21)中,补充定义 $x_0 = x_{2k+2} = 0$ 。式(21)组

成了井眼轨道设计问题的方程组, 独立方程个数为 $2k+3$, 故该方程组应存在 $2k+3$ 个未知数。而式(21)所涉及到的待定参数包括 x_i ($i=1, 2, \dots, 2k+1$), k_{2i} , ϵ_{2i} , α_{2i+1} 和 φ_{2i+1} ($i=1, 2, \dots, k$), 共 $6k+1$ 个, 所以需要从其中指定 $4k-2$ 个为已知数, 其余 $2k+3$ 个为未知数。

2.3 未知数组合

尽管井眼轨道设计方程组的描述形式都如式(21)所示, 但不同的未知数组合形式对应于不同已知条件下的井眼轨道设计问题。以下为实际井眼轨道设计时常采用的各种未知数组合形式。其中, 待定参数 ϵ_{2i} , x_{2i} ($i=1, 2, \dots, k$) 总是以未知数形式出现, 省略不述。

1) 对于单圆弧型井眼轨道的设计 ($k=1$), 未知数的组合情况有 9 种: α_3 , ϕ_3 以及 ΔL_1 , ΔL_3 和 K_2 中的某 1 个; ϕ_3 以及 ΔL_1 , ΔL_3 和 K_2 中的某 2 个; α_3 以及 ΔL_1 , ΔL_3 和 K_2 中的某 2 个。

2) 对于双圆弧型井眼轨道的设计 ($k=2$), 未知数的组合情况常用的有 14 种: α_3 , ϕ_3 以及 ΔL_1 , ΔL_3 , ΔL_5 , K_2 , K_4 , α_5 和 ϕ_5 中的某 1 个; α_5 , ϕ_5 以及 ΔL_1 , ΔL_3 , ΔL_5 , K_2 , K_4 , α_3 和 ϕ_3 中的某 1 个。

3) 对于三圆弧型井眼轨道的设计 ($k=3$), 未知数的组合情况常用的有 21 种: α_3 , ϕ_3 以及 ΔL_1 , ΔL_3 , ΔL_5 , ΔL_7 , K_2 , K_4 和 K_6 中的某 1 个; α_5 , ϕ_5 以及 ΔL_1 , ΔL_3 , ΔL_5 , ΔL_7 , K_2 , K_4 和 K_6 中的某 1 个; α_7 , ϕ_7 以及 ΔL_1 , ΔL_3 , ΔL_5 , ΔL_7 , K_2 , K_4 和 K_6 中的某 1 个。

4) 对于一般的 $k \geq 4$ 圆弧型井眼轨道的设计, 未知数的组合情况常用的有 $k(2k+1)$ 种: α_{2i+1} , ϕ_{2i+1} 以及 $\Delta L_1, \dots, \Delta L_{2k+1}$, K_2, \dots, K_{2k} 中的某 1 个 ($i=1, 2, \dots, k$)。

对于 $k \leq 3$ 的所有未知数组合形式, 作者都求出了拟解析解的具体计算公式, 并编写计算机程序进行了验证。对于 $k \geq 4$ 的一般情况, 给出了拟解析解的构造算法, 并进行了严格的数学证明。

3 多元非线性方程组的拟解析解

在第 1.4 节已经给出了井眼轨道设计方程组拟解析解的一般形式, 限于文章篇幅, 无法将每种未知数组合情况下的拟解析解计算公式一一写出, 部分结果参见文献[8-12]。下面仅举一例来说明拟解析解的具体公式。

3.1 拟解析解计算公式一例

设计问题 $k=2$, 未知数为 ΔL_3 , λ_2 , λ_4 , α_3 , ϕ_3 , ϵ_2 和 ϵ_4 。

令:

$$\begin{cases} c_1 = \mathbf{t}_a \cdot \mathbf{t}_1 \\ c_5 = \mathbf{t}_a \cdot \mathbf{t}_5 \\ c_{15} = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_5 \\ a_{15} = 1 - c_{15} \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} A(x) &= k_2^2 [a_{15}(1-x^2) + 2(c_1-x)(c_5-x)] - 4a_{15} \\ B(x) &= 2[k_2^2(c_5 + a_{15}x_1 - x)^2 + c_{15}^2 - 1] \\ C(x) &= 2[k_4^2(c_1 + a_{15}x_5 - x)^2 + c_{15}^2 - 1] \\ D(x) &= k_4^2 [a_{15}(1-x^2) + 2(c_1-x)(c_5-x)] - 4a_{15} \\ E(x) &= k_2^2 [(c_5 + 2a_{15}x_1 - x)(1-x^2) - \\ &\quad 2a_{15}x_1^2(c_1-x)] - 2a_{15}(c_1+x) \\ F(x) &= k_4^2 [(c_1 + 2a_{15}x_5 - x)(1-x^2) - \\ &\quad 2a_{15}x_5^2(c_5-x)] - 2a_{15}(c_5+x) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{cases} H(x) = A(x)D(x) - B(x)C(x) \\ I(x) = D(x)E(x) - B(x)F(x) \\ J(x) = A(x)F(x) - C(x)E(x) \\ G(x) = 2(c_1-x)H(x)I(x) + 2(c_5-x)H(x) \cdot \\ \quad J(x) + 2a_{15}I(x)J(x) + (x^2-1)H(x)^2 \end{cases} \quad (24)$$

式中: c_1 , c_5 , c_{15} 和 a_{15} 为由已知设计参数计算出来的常数; 多项式 $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, \dots , $G(x)$ 等为常系数多项式函数, 其系数可以由已知数 c_1 , c_5 , c_{15} , a_{15} , x_1 , x_5 , k_2 和 k_4 来计算。

$G(x)$ 为 10 次特征多项式, 假设其实数根的个数为 N , 使用数值算法求出的全部实数根为 η_i ($i=1, 2, \dots, N$), 则方程组的拟解析解按下列式依序逐个计算:

$$\begin{cases} x = \eta_i \\ y_1 = I(x)/H(x) \\ y_5 = J(x)/H(x) \\ x_2 = y_1 - x_1 \\ x_4 = y_5 - x_5 \\ x_3 = x_1 + x_5 - x \quad (i=1, 2, \dots, N) \\ \epsilon_2 = 2\arctan(k_2 x_2) \\ \epsilon_4 = 2\arctan(k_4 x_4) \\ t_3 = \frac{\mathbf{t}_a - y_1 \mathbf{t}_1 - y_5 \mathbf{t}_5}{x_2 + x_3 + x_4} \\ \alpha_3 = \arccos n_3 \\ \varphi_3 = \arctan(m_3/l_3) \end{cases} \quad (25)$$

如果计算中出现非法运算(如分母为 0 等),则舍弃该解;剩余解即为拟解析解,个数不超过 N 。

3.2 拟解析解的一般性质

对于 $k \geq 1$,在不同设计条件(第 2.3 节中所有的未知数组合)下,多项式 $H(x)$, $I(x)$, $J(x)$ 和 $G(x)$ 均可以从已知设计参数来计算,但表达式不同。

当特征多项式的次数不大于 4 时,拟解析解即为解析解。当特征多项式次数不小于 5 时,设计方程组没有解析解,只有拟解析解,需要使用数值算法先行求出特征多项式的全部实数根。

拟解析解的个数是有限的,最多不超过特征多项式实数根的个数或其 2 倍。使用拟解析解方法可以解决设计问题解的存在性问题,能够准确判断轨道设计问题无解、有唯一解、有多个解等情况,并且能在多解情况下无需迭代即可快速求出所有解。

限于篇幅,略去详细的数学证明过程。

3.3 井眼轨道设计问题求解的计算流程

知道了拟解析解的具体计算公式后,井眼轨道设计问题的求解过程变得非常简单:1)根据已知设计参数求出特征多项式的全部系数;2)求特征多项式的全部实数根;3)按照拟解析解的计算公式依次逐个计算每个未知数;4)对所求出的拟解析解进行检验,凡满足井眼轨道设计问题约束条件的拟解析解即是设计问题的真解,不满足的为伪解,应舍弃。

在上述计算流程中,最关键的一步是求特征多项式的全部实数根。多项式求根是一个经典的数学问题,有很多非常有效的数值算法,例如实根分离算法^[15],也有现成的各种编程语言的软件代码可以借鉴。为了提高计算效率,可以仅仅求出实数区间 $[-k, k]$ 中的全部实数根。

3.4 用于判定真解的存在性和多解性

假设特征多项式实数根的个数为 N 。当 $N=0$ 时,井眼轨道设计方程组没有拟解析解,对应的轨道设计问题无解;当 $N \geq 1$ 时,拟解析解的个数 $\leq N$ 或 $\leq 2N$ 。因为计算拟解析解时,可能会遇到分母为 0 或根号内数非正等情况,使拟解析解的计算无法继续进行下去,所以拟解析解的个数不会超过特征多项式实数根的个数(或其 2 倍,在某些未知数组合情况下,拟解析解计算公式中的反三角函数计算结

果可能有 2 个值)。

由于井眼轨道设计问题中变量约束条件的限制,设计问题的真解个数不会超过所求出方程组拟解析解的个数。

如果轨道设计问题本身有 2 个以上的真解(例如绕障轨道设计问题中,可以按顺时针或逆时针方向 2 种方式来设计),使用拟解析解方法可以求出全部真解,并且正确地判断出真解的个数。而在使用数值迭代法求解设计问题时,需要多次重设迭代初值、反复进行迭代计算,才有可能求出部分或全部真解,计算量远远大于拟解析解方法,而且还无法精确判断设计问题到底有几个真解。

无论具体的轨道设计问题无解、有唯一解还是有多个解,拟解析法都能快速计算出来,并给出解数量的准确判断。但是数值迭代法无法做到这一点。由此可见,拟解析法的计算性能和可靠性远远超过任何类型的数值迭代法。

3.5 计算的可靠性问题

钻井设计人员对于计算机软件有这样的要求:在给定已知设计数据之后,无需人工干预就能(快速)求出设计问题的解,或者自动判别出无解;如果有多个解,能够求出所有解。当程序能够自动地判定设计问题无解时,用户就能及时调整已知设计参数重新进行设计。无需人工干预也是一个常见的要求,因为用户对软件所使用的算法了解很少,难以掌握算法所需要调整的参数。满足这样的用户要求的算法可以称之为计算可靠性高的算法。

4 算例分析

笔者已经完成了 $k \leq 3$ 的全部 44 种未知数组合情况的计算机软件模块,并用大量的实际设计问题进行了检验。

4.1 算例 1

某水平井入靶点(A 点)位移为 $-119.33, 206.69$ 和 2413.87 m,按“稳斜—圆弧—稳斜—圆弧—稳斜”进行靶前轨道设计。已知 $\Delta L_1 = 1500$ m, $\Delta L_5 = 20$ m, $K_2 = 5^\circ/30$ m, $K_4 = 4^\circ/30$ m, $\alpha_5 = 76.11^\circ$, $\varphi_5 = 107.12^\circ$ 。未知数为 $\Delta L_3, \alpha_3, \varphi_3, \lambda_3, \lambda_4, \varepsilon_2$ 和 ε_1 。

根据已知设计数据,由式(22)~(24)可求得:

$$H(x) = -3902.838x^4 + 12434.381x^3 - 14053.843x^2 + 6530.160x - 996.365$$

$$G(x) = -1367343.747x^{10} + 9782786.906x^9 - 30468975.842x^8 + 54105046.679x^7 - 60230131.708x^6 + 43496074.5467x^5 - 20353935.488x^4 + 5967938.771x^3 - 1013628.904x^2 + 84468.678x - 2301.114$$

使用实根分隔算法^[15]求得 $G(x)$ 有 8 个实数根: $\eta_1 = 0.049$, $\eta_2 = 0.172$, $\eta_3 = 0.425$, $\eta_4 = 0.512$, $\eta_5 =$

$$0.744, \eta_6 = 0.827, \eta_7 = 1.106, \eta_8 = 1.203。$$

用式(25)计算拟解析解,并检验设计参数的约束条件,得知:只有与 $x = \eta_4$ 相对应的拟解析解才是设计问题的真解,其他都是伪解。该设计问题有唯一解: $x_2 = 0.021$, $x_4 = 0.186$, $x_3 = 0.115$, $\epsilon_2 = 17.19^\circ$, $\epsilon_4 = 92.86^\circ$, $\alpha_3 = 17.19^\circ$, $\varphi_3 = 273.83^\circ$, $\Delta L_3 = 279.50$ m。

最终求得的井眼轨道设计参数见表 1。

表 1 算例 1 的井眼轨道设计参数

Table 1 Design parameters of wellbore trajectory in example 1

井深/m	井斜角/(°)	方位角/(°)	北坐标/m	东坐标/m	垂深/m	水平投影长度/m	井眼曲率/((°) • (30 m) ⁻¹)	井段长度/m
0	0		0	0	0	0		1 500.00
1 500.00	0		0	0	1 500.00	0	5	103.14
1 603.14	17.19	273.83	1.03	-15.32	1 601.60	15.36		279.50
1 882.64	17.19	273.83	6.55	-97.74	1 868.61	97.96	4	696.44
2 579.08	76.11	107.12	-113.61	188.14	2 408.59	448.46		20.00
2 599.08	76.11	107.12	-119.33	206.69	2 413.39	467.87		

从式(25)可知, x_2 , x_3 和 x_4 均为以 x 为自变量的有理函数。令 x 在实数区间 $[-1, 2]$ 中均匀取点, 然后计算 x_2 , x_3 和 x_4 和 $g(x) = G(x)/H(x)$, 得到 4 条曲线的离散数据(见图 1)。图 1 中, 横轴上的实心小圆对应于特征多项式的实数根, 空心小圆对应于多项式 $H(x)$ 的实数根(称为奇点), 横轴上方浅黄色阴影区域对应于 x_2 , x_3 和 x_4 均为正数的实数区间(设计问题的固有约束条件, 称为正约束区间)。从图 1 可以看出:1)特征多项式的第 4 个(左数)实数根在正约束区间之内, 该实数根对应于设计问题的真解;2)其他实数根在正约束区间之外, 这些实数根对应于设计问题的伪解;3)设计问题只有唯一解。

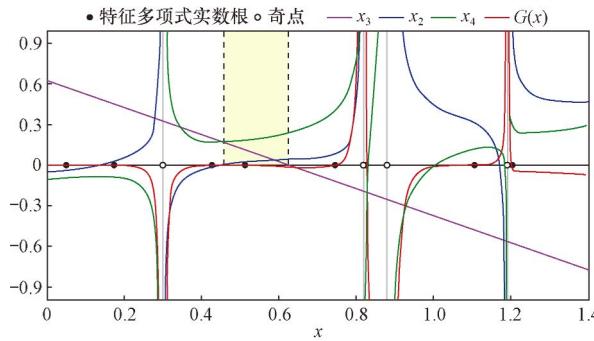


图 1 算例 1 的有解判别图

Fig. 1 A chart for identification of solution in example 1

4.2 算例 2

某水平井入靶点(A 点)位移为 $-119.33, 206.69$ 和 $2 413.87$ m, 按“稳斜—圆弧—稳斜—圆弧—稳斜”进行靶前轨道设计。已知设计数据: $\Delta L_1 = 300$ m, 其

他同算例 1。未知数同算例 1。

根据已知设计数据,由式(22)~(24)求得:

$$G(x) = -1367343.747x^{10} + 11045733.356x^9 - 39372110.968x^8 + 81376669.651x^7 - 107723799.527x^6 + 95116495.244x^5 - 56488241.911x^4 + 22156374.336x^3 - 5454301.466x^2 + 754808.237x - 44283.818$$

使用实根分隔算法^[15]求得 $G(x)$ 有 6 个实数根: $\eta_1 = 0.217$, $\eta_2 = 0.283$, $\eta_3 = 0.530$, $\eta_4 = 0.951$, $\eta_5 = 1.206$, $\eta_6 = 1.265$ 。经验证,这 6 个实数根都不满足真解约束条件,故设计问题无解(参见图 2)。从图 2 可以看出,这 6 个实数根均在正约束区间之外。

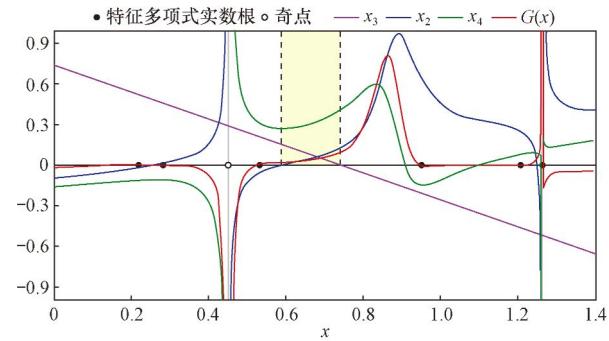


图 2 算例 2 的有解判别图

Fig. 2 A chart for identification of solution in example 2

5 结论

1) 拟解析解的计算基础是,求井眼轨道设计方程组的特征多项式的全部实数根,可以使用实根分

离算法结合二分法来快速求出特征多项式的全部实数根。

2) 根据拟解析解公式开发了钻井轨道设计的计算机软件,并对定向井、水平井、多目标井、分支井、纠偏井等大量的实际设计问题进行了数值研究,结果表明,所推导的拟解析解计算公式完全正确,计算速度和计算可靠性优于数值迭代法。

3) 拟解析解理论是钻井轨道设计问题求解理论中的一个新的研究分支,其研究成果可应用于钻井设计软件开发之中。实践表明,基于拟解析解理论开发出来的钻井设计软件,其计算效率和计算可靠性远优于基于数值迭代法的软件。

4) 拟解析解方法只适用于弯曲设计井段为空间圆弧曲线的设计问题,对于弯曲井段为圆柱螺线、自然曲线等其他数学模型的设计问题,暂时没有找到拟解析解的构建方法。

致谢:在多年的拟解析解理论研究和软件开发过程中,得到了中国石油长城钻探公司工程技术研究院佟长海高级工程师,中国石油大学(华东)韩志勇教授,中国科学院吴文俊院士、高小山高级研究员等的大力支持和帮助,在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

References

[1] 韩志勇. 定向钻井设计与计算[M]. 东营: 中国石油大学出版社, 2007: 111-117.
Han Zhiyong. Design and calculation of directional drilling [M]. Dongying: China University of Petroleum Press, 2007: 111-117.

[2] 鲁港, 邢玉德, 佟长海. 基于约束优化方法的三维多靶井眼轨迹设计模型[J]. 石油学报, 2005, 26(6): 93-95.
Lu Gang, Xing Yude, Tong Changhai. A model for design of three-dimensional multi-target wellboore trajectory based on restricted optimization[J]. Acta Petrolei Sinica, 2005, 26(6): 93-95.

[3] 刘修善, 石在虹. 给定井眼方向的修正轨道设计方法[J]. 石油学报, 2002, 23(2): 72-76.
Liu Xiushan, Shi Zaihong. A new method of path-correction planning with the desired direction[J]. Acta Petrolei Sinica, 2002, 23(2): 72-76.

[4] 刘修善, 何树山. 井眼轨道的软着陆设计模型及其应用[J]. 天然气工业, 2002, 22(2): 43-45.
Liu Xiushan, He Shushan. Well-path soft landing design model and its application[J]. Natural Gas Industry, 2002, 22(2): 43-45.

[5] 唐雪平, 苏义脑, 陈祖锡. 三维井眼轨道设计模型及其精确解[J]. 石油学报, 2003, 24(4): 90-93.
Tang Xueping, Su Yinao, Chen Zuxi. Three-dimensional well-path planning model and its exact solution[J]. Acta Petrolei Sinica, 2003, 24(4): 90-93.

[6] 黄根炉, 赵金海, 赵金洲, 等. 限定目标点井眼方向待钻轨道设计新方法[J]. 石油钻采工艺, 2006, 28(1): 19-22.
Huang Genlu, Zhao Jinhai, Zhao Jinzhou, et al. New method for hole trajectory design with a required direction at target[J]. Oil Drilling & Production Technology, 2006, 28(1): 19-22.

[7] 冯果忱. 非线性方程组迭代解法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1989: 112-172.
Feng Guochen. Iterative solution of nonlinear equations[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1989: 112-172.

[8] 鲁港, 余雷, 夏泊涇, 等. 三维井眼轨道设计模型及其拟解析解//苏义脑. 2010 年钻井基础理论研究与前沿技术开发新进展[C]. 北京: 石油工业出版社, 2012: 137-146.
Lu Gang, Yu Lei, Xia Boyi, et al. The 3D well-path planning model and its quasi-analytic solutions // Su Yinao. New progress in basic research and cutting-edge technology development drilling on 2010[C]. Beijing: Petroleum Industry Press, 2012: 137-146.

[9] 鲁港. 限定井眼方向待钻轨道设计的代数法[J]. 西南石油大学学报: 自然科学版, 2009, 31(5): 158-162.
Lu Gang. An algebraic method of borehole trajectory design with defined borehole direction[J]. Journal of Southwest Petroleum University: Science & Technology Edition, 2009, 31(5): 158-162.

[10] 方敏, 鲁港, 王立波. 三维圆弧型井眼轨道模型的完全解[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2009, 37(3): 317-321.
Fang Min, Lu Gang, Wang Libo. All solutions of 3D arc-typed well-path planning model[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2009, 37(3): 317-321.

[11] 鲁港, 巩小明, 曹传文, 等. 限定入靶井斜的双圆弧型纠偏轨道设计问题的全解[J]. 石油天然气学报, 2009, 31(1): 75-79, 99.
Lu Gang, Gong Xiaoming, Cao Chuanwen, et al. All solutions to dual arc correcting trajectory design with restricted target-entering deviation[J]. Journal of Oil and Gas Technology, 2009, 31(1): 75-79, 99.

[12] 刘乃震, 鲁港, 佟长海. 限定入靶方位的双圆弧型纠偏轨道设计问题的全解[J]. 石油地质与工程, 2010, 24(1): 94-97.
Liu Naizhen, Lu Gang, Tong Changhai. All solutions to dual arc correcting trajectory design with restricted target-entering azimuth[J]. Petroleum Geology and Engineering, 2010, 24(1): 94-97.

[13] 鲁港. 定向井轨道设计参数谱集理论探索[J]. 石油钻探技术, 2012, 40(5): 7-12.
Lu Gang. The spectral theory for parameters design of directional well trajectory[J]. Petroleum Drilling Techniques, 2012, 40(5): 7-12.

[14] 吴文俊. 数学机械化[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 210-229.
Wu Wenjun. Mathematics mechanization[M]. Beijing: Science Press, 2003: 210-229.

[15] 陆征一, 何碧, 罗勇. 多项式系统的实根分离算法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 34-55.
Lu Zhengyi, He Bi, Luo Yong. The real roots separation algorithms of the polynomial system and its application[M]. Beijing: Science Press, 2004: 34-55.

[16] 高小山, 王定康, 裴宗燕, 等. 方程求解与机器证明[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 143-195.
Gao Xiaoshan, Wang Dingkang, Qiu Zongyan, et al. Equation solving and machine proving[M]. Beijing: Science Press, 2006: 143-195.